О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

У. Ш. Абдурахмонов
преподаватель Кокандского Государственного Педагогического Института

Аннотация
Настоящая работа посвящена краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной сфере. В статье поднимается и применяется один вопрос. Рассмотрены все случаи треугольной сферы. Одна теорема представлена с доказательством.

Ключевые слова: треугольник, сфера, парабола, уравнение гиперболы, краевая задача, функция, дифференциал, дифференциальное уравнение.

В настоящей работе ставится и исследуется одна краевая задача для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0 \tag{1}$$

в треугольной области G плоскости xOy, где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup J_1\cup J_2\cup J_3$, G_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2 – треугольник с вершинами в точках A, B, $C(1/2,-1/2)$; G_3 – треугольник с вершинами в точках A, $D(-1,1)$, A_0; G_4 – треугольник с вершинами в точках B, $E(2,1)$, B_0; J_1 – открытый отрезок с вершинами в точках A, B; J_2 – открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0; J_3 – открытый отрезок с вершинами в точках B, B_0; $c\in R$,

$$Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y, & (x,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in G_i \quad (i=2,3,4).\end{cases}$$

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x и u_y – непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u|_{BC}=\psi_1(x),\quad 1/2\le x\le 1, \tag{2}$$ $$u|_{AF_1}=\psi_2(x),\ -1/2\le x\le 0, \tag{3}$$

$$u|_{BF_2} = \psi_3(x),\ 1 \le x \le 3/2, \quad (4) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_4(x),\ 1/2 \le x \le 1, \quad (5)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BE} = \psi_5(x),\ 1 \le x \le 2, \quad (6) \qquad u|_{A_0D} = f_1(x),\ -1 \le x \le 0, \quad (7)$$

$$u|_{B_0E} = f_2(x),\ 1 \le x \le 2 \quad (8)$$

и 4) следующим условиям склеивания:

$$u(x,+0) = u(x,-0) = \tau_1(x),\ 0 \le x \le 1, \quad (9) \qquad u_y(x,+0) = u_y(x,-0) = \nu_1(x),\ 0 \le x \le 1, \quad (10)$$

$$u_{yy}(x,+0) = u_{yy}(x,-0) = \mu_1(x),\ 0 < x < 1, \quad (11) \qquad u(+0,y) = u(-0,y) = \tau_2(y),\ 0 \le y \le 1, \quad (12)$$

$$u_x(+0,y) = u_x(-0,y) = \nu_2(y),\ 0 \le y \le 1, \quad (13) \qquad u_{xx}(+0,y) = u_{xx}(-0,y) = \mu_2(y),\ 0 < y < 1, \quad (14)$$

$$u(1-0,y) = u(1+0,y) = \tau_3(y),\ 0 \le y \le 1, \quad (15) \qquad u_x(1-0,y) = u_x(1+0,y) = \nu_3(y),\ 0 \le y \le 1, \quad (16)$$

$$u_{xx}(1-0,y) = u_{xx}(1+0,y) = \mu_3(y),\ 0 < y < 1. \quad (17)$$

Здесь $\psi_i\left(i=\overline{1,5}\right)$, $f_j\left(j=\overline{1,2}\right)$ – заданные достаточно гладкие функции, а τ_i, ν_i, μ_i $(i=1,2,3)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x+y=0$ или $x-y=1$, $F_1(-1/2,1/2)$, $F_2(1/2,3/2)$.

Теорема. Если $\psi_1 \in C^3[1/2,1]$, $\psi_2 \in C^3[-1/2,0]$, $\psi_3 \in C^3[1,3/2]$, $\psi_4 \in C^2[1/2,1]$, $\psi_5 \in C^2[1,2]$, $f_1 \in C^3[-1,0]$, $f_3 \in C^3[1,2]$, причем выполняются условия согласования $\psi_1(1)=\psi_3(1)$, $\psi_4(1)=\psi_5(1)$, то задача-1 допускает единственное решение.

Теорема доказывается методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1(x+y)e^{-cy},\ (x,y) \in G_1, \quad (18)$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_i(x+y)e^{-cy},\ (x,y) \in G_i \quad (i=2,3,4), \quad (19)$$

где введено обозначение $u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y) \in G_i\ \left(i=\overline{1,4}\right)$, причем $\omega_i(x+y)\left(i=\overline{1,4}\right)-$ неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Исследование будем провести сначала в область G_2. Записывая решение уравнения (19) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (9), (10) и подставляя это решение в (5) после некоторых преобразований, находим функцию $\omega_2(x+y)$. Затем подставляя это решение в (2) после некоторых выкладок, имеем первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$. Переходя в уравнениях (1) и (19) $(i=2)$ к пределу при $y \to 0$, получим еще две соотношения между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$. Исключая из этих трех соотношений функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$ и интегрируя полученное уравнение от 0 до x, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $\tau_1(x)$. При решении этого уравнения могут быть три случая: 1°. $c \ne -2$, $c \ne 0$; 2°. $c=-2$; 3°. $c=0$. В случае 1° характеристическое уравнение этого уравнения имеет две различные действительные корни: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\frac{c}{2}$. В случае 2° характеристическое уравнение этого уравнения имеет один двукратный действительный корень: $\lambda_{1,2}=-1$. В случае 3° характеристическое уравнение этого уравнения имеет две различные действительные корни: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=0$. Решая это уравнение при условиях $\tau_1(0)=\psi_2(0)$, $\tau_1(1)=\psi_1(1)$, $\tau_1'(1)=\frac{1}{2}\psi_1'(1)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_4(1)$, находим функцию $\tau_1(x)$ во всех случаях. Тогда будет известной и функция $u_2(x,y)$.

Теперь переходим в области G_3. Сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{3xx}-u_{3yy}=\Omega_3(x+y)e^{-cy}, \\ u_3(x,1)=F_1(x),\ u_{3y}(x,1)=F_2(x),\ -1\le x\le 1, \\ u_3\big|_{AF_1}=\psi_2(x),\ -1/2\le x\le 0, \\ u_3(0,y)=\tau_2(y),\ u_{3x}(0,y)=\nu_2(y),\ 0\le y\le 1, \end{cases}$$

где функция $F_1(x)$ определяется следующим образом: в промежутке $-1\le x\le 0$ – $F_1(x)=f_1(x)$, а в промежутке $0\le x\le 1$ она неизвестна; функции $F_2(x)$ и $\Omega_3(x)$ неизвестны в промежутке $-1\le x\le 1$.

Методом продолжения решаем эту задачу и получим соотношение между неизвестными функциями $\tau_2(y)$, $\nu_2(y)$:

$$\nu_2(y)=\frac{1}{2}\tau_2'(y)+\frac{c+2}{4}\int_0^y e^{\frac{c}{2}(z-y)}\tau_2'(z)\,dz+\beta_1(y),\ 0\le y\le 1, \qquad (20)$$

где $\beta_1(y)$ – известная функция.

Далее, переходим в область G_4. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{4xx}-u_{4yy}=\omega_4(x+y)e^{-cy}, \\ u_4(x,1)=F_3(x),\ u_{4y}(x,1)=F_4(x),\ 0\le x\le 2, \\ u\big|_{BF_2}=\psi_3(x),\ 1\le x\le 3/2;\ \left.\frac{\partial u_4}{\partial n}\right|_{BE}=\psi_5(x),\ 1\le x\le 2, \\ u_4(1,y)=\tau_3(y),\ u_{4x}(1,y)=\nu_3(y),\ 0\le y\le 1, \end{cases}$$

где функция $F_3(x)$ определяется следующим образом: в промежутке $1\le x\le 2$ – $F_3(x)=f_3(x)$, а в промежутке $0\le x\le 1$ она неизвестна; функция $F_4(x)$ неизвестна в промежутке $0\le x\le 2$.

Решая эту задачу методом продолжения и удовлетворяя условию $u_{4x}(1,y)=\nu_3(y)$, приходим к соотношению между неизвестными функциями $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$:

$$\nu_3(y)=-\tau_3'(y)+\beta_2(y),\ 0\le y\le 1, \qquad (21)$$

где $\beta_2(y)$ – известная функция.

Далее, переходя в область G_1 и записывая решение уравнения (18), удовлетворяющего условиям (9), (12), (15) и пользуясь условиям склеивания, с учетом соотношения (20), (21), получим систему двух интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно неизвестных функций $\tau_2'(y)$ и $\tau_3'(y)$. Решая эту систему, находим функции $\tau_2'(y)$ и $\tau_3'(y)$ и тем самым, и функции $u_1(x,y)$, $u_3(x,y)$, $u_4(x,y)$.

Замечание.Таким образом, мы доказали однозначную разрешимость поставленной задачи 1.

Литература

1. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. Дифференц. уравнения, 1986, т.22, №1, с.25-31.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.
3. Мамажанов М., Шерматова Х.М., Мамадалиева Х.Б. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в вогнутой шестиугольной области. Актуальные научные исследования в современном мире. ISCIENCE.IN.UA, Переяслав-Хмельницкий, 2017, вып.2(22), стр. 148-151.
4. Мамажанов М., Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в вогнутой шестиугольной области. Вестник КРАУНЦ, Физ.мат. науки, 2017, №1(17), стр. 14-21.
5. Мамажанов М., Шерматова Ҳ.М., Мукадасов Х. Постановка и метод решения некоторых краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа. Вестник КРАУНЦ. Физ-мат. науки. 2014. № 1 (8). с.7-13.
6. Мамажанов М., Мамажонов С.М. Постановка и метод исследования некоторых краевых задач для одного класса уравнений четвертого порядка параболо-гиперболического типа. Вестник КРАУНЦ. Физ-мат. науки. 2014. № 1 (8). с.14-19.
7. Sh, Abdurakhmanov U. "The main approaches to the formation of the control action in younger schoolchildren in the process of teaching mathematics." INTERNATIONAL JOURNAL OF SOCIAL SCIENCE & INTERDISCIPLINARY RESEARCH ISSN: 2277-3630 Impact factor: 7.429 11.11 (2022): 142-150.
8. Isroilova, Gulnora, and Sh Abdurahimov. "The socio-political activity of the youth of Uzbekistan." International conference on multidisciplinary research and innovative technologies. Vol. 2. 2021.
9. Abdurakhmonovich, Shokosim Abdurahimov. "Informative-Target Analysis." Middle European Scientific Bulletin 22 (2022): 69-71.

10. Abdurakhmonovich, Shokosim Abdurahimov. "Technology of Critical Thinking in Russian Language and Literature Lessons in 5-6 Grades." Middle European Scientific Bulletin 22 (2022): 64-68.
11. Shoqosim o‘g‘li, Abduraxmonov Umidjon. "The importance of didactic games in teaching mathematics in secondary schools." Web of Scientist: International Scientific Research Journal 3.6 (2022): 1566-1570.
12. Абдурахманов, Умиджон, Ормоной Тошматова, and Хуснида Мелиева. "Umumta’lim maktablarida matematika fanini o ‘qitishning zamonaviy didaktik vositalari va muammoli ta’lim texnologiyasi." Общество и инновации 3.3/S (2022): 231-238.
13. Shoqosim o‘g‘li, Abdurahmonov Umidjon, Meliyeva Xusnida Xafizaliyevna, and G‘ofurov To‘lqinjon. "MODERN DIDACTIC MEANS OF TEACHING MATHEMATICS IN SECONDARY SCHOOLS AND PROBLEM EDUCATIONAL TECHNOLOGY." Galaxy International Interdisciplinary Research Journal 10.4 (2022): 460-467.