О ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ У СТУДЕНТОВ

Тургунбаев Р.М.
профессор ТГПУ им.Низами

Долтаева Ш. Б.
студент магистратуры ТГПУ им.Низами

Аннотация
В данной статье рассмотрены типы вспомогательных задач курса математического анализа, помогающих формированию понятия предел функции у студентов.

Ключевые слова: математический анализ, предел функции, задачи, график функции

Annotation.
This article discusses the types of auxiliary tasks of the course of mathematical analysis, which helps the students to form the concept of the limit of a function.

Keywords: mathematical analysis, function limit, problems, graph of a function

Знание курса математического анализа и свободное овладение его объектами и методами не только служат повышению математической культуры будущего учителя математики, но являются необходимым элементом его профессиональной подготовки. Материалы данного курса тесно связаны с основными содержательными линиями школьного курса математики и являются их научной основой. Основные понятия математического анализа являются и основными понятиями школьного курса математики. Поэтому в лексиконе первокурсников содержатся остаточные знания (как активные, так и неактивные) этих базовых понятий, а также умения решать задачи связанные с этими понятиями. Многолетний опыт преподавания, наблюдения и практики показывают, что учащиеся умеют находить область определения аналитически заданной функции, строить графики некоторых функций, находить производные функций, в общем решать задачи, связанные с вычислениями. Однако они не могут объяснить определения, свойства и связи между понятиями, с трудом решают связанные с ними теоретические задачи, их понятийное мышление недостаточно сформировано. Иногда лексикона студента недостаточно для изучения предмета. Поэтому важно активизировать лексикон вчерашнего школьника, заполнить в нем пробелы. Помимо стандартных заданий, инструментом для этого служит специально разработанная система вопросов и задач.

Одной из основных целей темы “Предел функции” курса математического анализа является формирование у студентов понятия предел функции. Во время первого лекционного занятия даётся определение предела функции в точке на языке последовательностей или на языке "$\varepsilon - \delta$", простейшие свойства функции, имеющий предел (ограниченность, единственность предела, предельный переход в равенстве, свойства связанные с неравенствами, предел промежуточной функции). Далее односторонние пределы, арифметические действия с пределами, и далее. На практических занятиях продолжается формирование понятия предела функции и его свойства. В задачниках [1,2] в основном даны задачи на приведения под понятия (доказать, по определению, что предел функции равен данному числу), далее даны задачи на нахождение предела функции (непосредственное вычисление, раскрытие неопределенностей, применение замечательных пределов и эквивалентных бесконечно малых). Нахождение предела являются процедурными задачами, и не вызывают у студентов особых затруднений.

В классических задачниках по математическому анализу используемых в педагогических вузах мало задач, помогающих пониманию и усвоению понятия предела функции. В зарубежных учебниках [например, 3] по Calculus таких задач достаточно и используются для формирования трех видов представлений (графическое, числовое и символическое) понятия.

Мы опишем типы таких вспомогательных задач. Некоторые задачи являются лишь подготовительными к введению нового понятия и могут быть предложены студентам (при самостоятельном изучении) до того, как будет дано строгое определение.

1. Для уточнения геометрического смысла нового понятия, формирование визуального представления, образного мышления у студентов:

1) по заданному графику найти предел, или объяснить не существования предела.

2) функция задана аналитически, построить ее график и найти предел.

3) нарисовать эскиз графика функции, удовлетворяющей соотношению, зависящему от заданного предела

2. Для подготовки конкретных элементов будущего определения, новых для студентов, встречающихся впервые или требующих дальнейшего уточнения. Например, перед введением определения предела функции в точке, студентам можно предложить следующие упражнения:

1) решить неравенства и ответ изобразить на числовой прямой:

а) $0 < |x-3| < 1$; б) $0 < |2-x| < 0{,}1$; с) $0 < |x-a| < \delta$; д) $0 < |3a-x| < \frac{\delta}{3}$.

2) выразить в виде двойного неравенства:

а) проколотую 2-окрестность точки 5;

б) левую 1,2-окрестность точки -3;

с) правую 0,1-окрестность точки a.

3. Для формирования числового представления предела у студентов: Например,
Угадайте значение предела $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}$ (если он существует), оценив функцию $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-9}$ по заданным числам (с точностью до шести знаков после запятой) x:
3.1, 3.05, 3.01, 3.001, 3.0001,
2.9, 2.95, 2.99, 2.999, 2.9999.
4. Задачи для «сборки» определения:
1) Нарисовать график функции $y = 2x$ и используя график, определить следующие:
а) если $|y-4| < 2$, то найти множества значений переменной x;
б) если $|y+1| < 1$ то найти множества значений переменной x;
с) если $|y| < \frac{1}{2}$ то найти множества значений переменной x;
2) Нарисовать график функции $y = \frac{1}{x}$. Выяснить верно или не верно утверждение:
а) если $\left|y-\frac{2}{3}\right| < \frac{1}{3}$, то соответствующие значения переменной x удовлетворяют неравенству $|x-2| < 1$;
б) если $\left|y+\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$, то соответствующие значения переменной x удовлетворяют неравенству $|x+2| < 1$;
3) Нарисовать график функции $y = 1-\frac{1}{2}x$. На оси ординат выделите ε −окрестность точки 2 и на оси абсцисс указать окрестность точки 2 удовлетворяющий неравенству $|y-2| < \varepsilon$, где: 1) $\varepsilon = 2$; 2) $\varepsilon = 1$; 3) $\varepsilon = 0{,}5$.
Можно ли найти соответствующую окрестность для произвольного положительного числа ε?
5. На использование графических калькуляторов:
1) построить график функции $f(x) = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3+x^2}}$ с помощью графического калькулятора (например Desmos). Указать значение каждого предела, если он существует. Если его нет, объяснить почему: $a)\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x); b)\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x);\ c)\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)$
2) Для предела $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x+4) = 6$ показать выполнения условия определения предела, находя значения δ соответствующий $\varepsilon = 0.1$
6. Для первичного закрепления полученного определения:
1) записать заданное предельное соотношение в виде кванторов и привести пример функции, удовлетворяющей этому соотношению;
2) записать заданную цепочку кванторов в виде предела и привести пример функции, удовлетворяющей этому утверждению.
6. Работа с полученным определением и его отдельными элементами:
1) Упражнения на доказательство данного предельного соотношения по определению;

2) Упражнения, позволяющие усвоить логическую структуру определения (на основе изменения отдельных элементов определения).

Как показывает практика, такой подход создает ощущение преемственности, предвидения (прогнозирования), устраняет психологическую тревогу, способствует усвоению учебного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П.., «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Учеб. Пособие для вузов. М.: ООО «Издательство Астрель» ООО «Издательство АСТ», 2003 г – 558 [2] ст.

2. Кудрявцев Л.Д., КутасовА.Д., Чехлов В.И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость Учеб пособие/ Под ред Л Д Кудрявцева – 2-е изд., перераб – М. ФИЗМАТЛИТ. 2003 – 496 с.

3. Calculus Early Transcendental. 8th education. James Stewart, 2016.