ПОМОЩЬ УЧЕНИКАМ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ

А. А. Норматов
Узбекистан.Коканд ГПИ

Аннотация

В этой статье показаны некоторые нестандартные методы решения иррациональных и показательных уравнений, нахождения неявных функций и упрощения алгебраических выражений. Эти методы расширяют мышление учащихся, побуждают их думать и искать рациональные пути в решении задач.

Ключевые слова: обозначение, разложение на множители, посторонний корень, возведение в степень, равенство многочленов, свойства корня.

Abstract

This article shows some non-standard methods for solving irrational and exponential equations, finding implicit functions and simplifying algebraic expressions. These methods expand students' thinking, inspire them to think and seek rational ways in solving problems.

Keywords: designation, factorization, extraneous root, exponentiation, polynomial equality, root properties

Есть такие уравнения, для которых обычные способы решения уравнений не всегда удобные. Иногда применение эти способов приводят к некоторым сложностям. Например, постараемся решить это уравнение таким способам:

$$2\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}\ .$$

Для решение этого уравнения возведем в куб обе части этого уравнение:

$$(2\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2})^3=(3\sqrt[3]{x^2-1})^3$$

По формуле куба суммы двух слагаемых имеем:

$$8(x-1)^2+12\sqrt[3]{(x-1)^4}\sqrt[3]{(x+1)^2}+6\sqrt[3]{(x-1)^2}\sqrt[3]{(x+1)^4}+(x+1)^2=27(x^2-1).$$

Вот здесь начинается проблема. Что будем дальше?

Продолжение этого способа приведёт нас только к решению более сложного уравнения высшей степени. Но и есть более простые способы, так называемые частные способы, которые могут дать нам результат решения очень коротким путём. Ниже показаны некоторые такие частные способы, для решения разных задач. Иногда ввод обозначения каких-то выражений буквами в уравнении даст нам более простое уравнение, чем исходное.

1. Решите уравнение: $2\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$

Решение. Введем обозначение в уравнении: $2\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$:

$\sqrt[3]{x-1}=a,\ \sqrt[3]{x+1}=b;$ Тогда уравнение принимает вид:

$2a^2+b^2=3ab$

Это уравнение более простое, чем исходное.

Теперь решим это уравнение: $2a^2+b^2-3ab=0,\ 2a^2+b^2-2ab-ab=0,$

$2a(a-b)-b(a-b)=0,\ (2a-b)(a-b)=0.$

Откуда $2a=b, a=b$. Итак, если учитываем, что $\sqrt[3]{x-1}=a$ и $\sqrt[3]{x+1}=b$ то решение данное уравнение $2\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$ приведётся к решением уравнении $2\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{x+1}$ и $\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{x+1}$. Решая уравнение $2\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{x+1}$,получим решение $x=1\frac{2}{7}$, а уравнение $\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{x+1}$ не имеет решений. Наконец, получим ответ: $x=1\frac{2}{7}$.

2. Найти произведение корней уравнения $2^{2x+4}-10\cdot 2^{x^2}+4^{x^2-x}=0$.

Решение. Вместо уравнения $2^{2x+4}-10\cdot 2^{x^2}+4^{x^2-x}=0$ напишем $2^{2x+4}-10\cdot 2^{x^2}+2^{2x^2-2x}=0$ или $2^4\cdot 2^{2x}-10\cdot 2^{x^2}+(2^{x^2})^2\cdot 2^{-2x}=0$ и введем обозначение в последнем уравнении: $m=2^{2x}$, $n=2^{x^2}$. Тогда уравнение $2^4\cdot 2^{2x}-10\cdot 2^{x^2}+(2^{x^2})^2\cdot 2^{-2x}=0$ принимает вид $16\cdot m-10\cdot n+n^2\cdot m^{-1}=0$ или $16m^2-10\cdot nm+n^2=0.$ Это уравнение равносильно уравнению $(n-2m)(n-8m)=0$, откуда $n=2m,\ n=8m$. Вместо n и m подставим в соответствии выражения 2^{x^2} и 2^{2x} и получим:

$2^{x^2}=2\cdot 2^{2x}$, $2^{x^2}=8\cdot 2^{2x}$. Откуда имеем уравнения соответственно: $x^2=1+2x$, $x^2=3+2x$. Решая эти уравнения получим корни данного уравнения: $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$, $x_3=-1$, $x_4=3$. И здесь найдем их произведение :$(1-\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})\cdot(-1)\cdot 3=3$

3. Найти сумму квадратов корней уравнения

$(\sqrt{3x-2}-3)(4+\sqrt{x+3})=3x-11$.

Решение. Введем обозначение: $\sqrt{3x-2}=a$, $\sqrt{x+3}=b$ Но здесь возникает проблема. . Для того чтобы решить эту проблему найдем x в обозначении $\sqrt{3x-2}=a$: $3x-2=a^2,\ x=\frac{a^2+2}{3}$.

Теперь исходное уравнение принимает такой вид:

$(a-3)(4+b)=a^2-9$. Раскроем скобки и разложим на множители:

$$4a+ab-12-3b=a^2-9,$$
$$a^2-4a+3-ab+3b=0,$$
$$(a-1)(a-3)-b(a-3)=0,$$
$$(a-3)(a-b-1)=0.$$

Откуда $a-3=0$ или $a-b-1=0$, или $a=3$ или $a=b+1$. В равенстве $x=\frac{a^2+2}{3}$ при $a=3$ получается $x=\frac{11}{3}$ Теперь решим уравнение $a=b+1$, вместо a и b подставим выражения $\sqrt{3x-2}$ и $\sqrt{x+3}$ и соответственно получим

$\sqrt{3x-2}=\sqrt{x+3}+1$. Возведя в квадрат обе стороны в последнем уравнении имеем вид $3x-2=x+3+2\sqrt{x+3}+1$. После упрощения этого уравнения, получим следующее уравнение:

$x-3=\sqrt{x+3}$. Возведя в квадрат обе стороны в последнем уравнении и решая квадратное уравнение $x^2-6x+9=x+3$, получим $x=1$, $x=6$. Но здесь корень $x=1$ посторонний.

Итак, имеем два корня $x=\frac{11}{3}$ и $x=1$. Сумма квадратов этих корней равна: $(\frac{11}{3})^2+6^2=49\frac{4}{9}$.

4. Найти сумму всех значений коэффициентов a и b , если многочлен $x^4+8x^4+ax^2+bx+1$ является квадратом некоторого многочлена. Решение. Положим, что

$$x^4+8x^4+ax^2+bx+1=(x^2+px+q)^2.$$

Возведем в квадрат правую часть этого уравнения и после упрощения получим:

$$x^4+8x^4+ax^2+bx+1=x^4+2px^3+2qx^2+2pqx+q^2$$

По равенству многочленов имеем следующую систему: $\begin{cases} 2p=8 \\ p^2+2q=a \\ 2pq=b \\ q^2=1 \end{cases}$ Откуда из первых и четвертых равенств получим, что $p=4$, $q=\pm1$. Подставляя эти значения во вторые и третьи равенства системы найдем значения a и b : $a=18$, $a=14$, $b=8$, $b=-8$. Значит, сумма всех значений коэффициентов a и b равна: $18+14+8+(-8)=32$

5. Найти многочлен $f(x)$,если известно, что $f(x+2)+f(x-1)=2(x^2+7)$.

Решение. Введем обозначение: $x + 2 = t$. Откуда $x = t - 2$. Теперь в равенстве $f(x+2) + f(x-1) = 2(x^2 + 7)$ вместо x подставим $t - 2$ и выполним элементарное преобразование:

$$f(t) + f(t-3) = 2((t-2)^2 + 7)$$
$$= 2(t^2 - 4t + 11) = 2t^2 - 8t + 22 = t^2 - t + 5 + t^2 - 7t + 17 = t^2 - t + 5 + t^2 - 7t + 12 + 5 = t^2 - t + 5 + (t-3)(t-3-1) + 5 = t^2 - t + 5 + (t-3)^2 - (t-3) + 5$$

Откуда вытекает, что $f(x) = x^2 - x + 5$.

6. Вычислить: $\left(\sqrt[4]{13} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{13}-1}{(\sqrt[4]{13}+1)^2}} + \frac{\sqrt[4]{13}-1}{\sqrt[3]{(\sqrt{13}-1)^2}}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot (\sqrt{13} - 1)^{\frac{4}{5}}.$

Решение. Введем обозначение $\sqrt[4]{13} = a$. Тогда получим $\sqrt{13} = a^2$. Теперь данное выражение принимает следующий вид:

$$\left(a \cdot \sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^2}} + \frac{a-1}{\sqrt[3]{(a^2-1)^2}}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot (a^2 - 1)^{\frac{4}{5}} \quad (1).$$

Упрощаем это выражение, для этого в выражении $\sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^2}}$ умножим на $a+1$ числитель и знаменатель подкоренного выражения: по следующему свойству корня n-й степени

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{a^n} = a, \quad \text{где } a \geq 0, b > 0$$

$\sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2-1}}{a+1}$ (2) .Подставим (2) выражение в (1) выражение:

$$.\left(a \cdot \sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^2}} + \frac{a-1}{\sqrt[3]{(a^2-1)^2}}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot (a^2 - 1)^{\frac{4}{5}} = \left(a \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2-1}}{a+1} + \frac{a-1}{\sqrt[3]{(a^2-1)^2}}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot (a^2 - 1)^{\frac{4}{5}}$$
$$= \left(\frac{a\cdot(a^2-1) + a^2 - 1}{(a+1)\sqrt[3]{(a^2-1)^2}}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot (a^2 - 1)^{\frac{4}{5}} =$$
$$\left(\frac{(a+1)\cdot(a^2-1)}{(a+1)\sqrt[3]{(a^2-1)^2}}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot (a^2 - 1)^{\frac{4}{5}} = a^2 - 1 .$$

Так как $a^2 = \sqrt{13}$, получим ответ: $\sqrt{13} - 1$. Итак

$$\left(\sqrt[4]{13}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{13}-1}{\left(\sqrt[4]{13}+1\right)^2}}+\frac{\sqrt[4]{13}-1}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{13}-1\right)^2}}\right)^{\frac{3}{5}}\cdot\left(\sqrt{13}-1\right)^{\frac{4}{5}}=\sqrt{13}-1.$$

Литература

1. М.И.Сканави. «Полный сборник решений задач для поступающих в вузы». Москва. Издательство «Мир и образование» и Минск «Хорвест» 2003 г.

2. В.В.Кочагин, М.Н.Кочагина «Математика репетитор». Москва. Издательство « ЭКСМО».2009г.

3. Э.З. Шувалова «Повторим математику» .Москва. Издательство «Высшая школа»1974г.

4. В.В.Зорин. «Пособие по математике для поступающих в вузы». Москва. Издательство «Высшая школа»1973г.

5. М.Я.Выгодский «Справочник по элементарной математике». Москва.Издательства «Наука»1982г.

6. А.Б.Василевский «Обучение решению задач по математике». Минск.Издательства «Вышэйшая школа»1988г.

7. Normatov, A. (2022). Text problems. INTERNATIONAL JOURNAL OF SOCIAL SCIENCE & INTERDISCIPLINARY RESEARCH ISSN: 2277-3630 Impact factor: 7.429, 11(11), 341-347.

8. Normatov, A. (2022). APPLICATIONS OF THE DERIVATIVE. Galaxy International Interdisciplinary Research Journal, 10(12), 1161-1164.

9. Абдурахманов, У., Тошматова, О., & Мелиева, Х. (2022). Umumta’lim maktablarida matematika fanini o ‘qitishning zamonaviy didaktik vositalari va muammoli ta’lim texnologiyasi. Общество и инновации, 3(3/S), 231-238.

10. Sh, A. U. (2022). The main approaches to the formation of the control action in younger schoolchildren in the process of teaching mathematics. INTERNATIONAL JOURNAL OF SOCIAL SCIENCE & INTERDISCIPLINARY RESEARCH ISSN: 2277-3630 Impact factor: 7.429, 11(11), 142-150.

11. Shoqosim o‘g‘li, A. U., Xafizaliyevna, M. X., & To‘lqinjon, G. O. (2022). MODERN DIDACTIC MEANS OF TEACHING MATHEMATICS IN SECONDARY SCHOOLS AND PROBLEM EDUCATIONAL TECHNOLOGY. Galaxy International Interdisciplinary Research Journal, 10(4), 460-467.

12. Абдурахмонов, У. Ш. (2022, December). О ПОСТАНОВКЕ И ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА. In E Conference Zone (pp. 118-121).

13. Абдурахмонов, У. Ш. (2022). О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ. Conferencea, 202-206.
14. Abdurahmonov, U. (2022). FUNKSIYA HOSILASI GEOMETRIK VA MEXANIK MA'NOLARI. Журнал интегрированного образования и исследований, 1(6), 135-138.
15. Abdurahmonov, U. (2022). EKSTREMAL MASALALARNI YECHISHDA TENGSIZLIKLAR USULIDAN FOYDALANISH. Eurasian Journal of Academic Research, 2(12), 1239-1242.
16. Shoqosim o'g'li, A. U., Rahimovna, T. O. R., Mamasiddiqovna, A. N., Mamasoliyevich, T. R., & Roxataliyevna, A. N. (2022). Technologies For Improving The Quality Of Educational Results Of Schoolchildren By Developing A Personalized Model Of Teaching Mathematics Through Interactive Stories. Journal of Positive School Psychology, 6(11), 1354-1365.
17. Shoqosim o'g'li, A. U. (2022). The importance of didactic games in teaching mathematics in secondary schools. Web of Scientist: International Scientific Research Journal, 3(6), 1566-1570.
18. Abdurakhmonovich, S. A. (2022). Technology of Critical Thinking in Russian Language and Literature Lessons in 5-6 Grades. Middle European Scientific Bulletin, 22, 64-68.
19. Abdurakhmonovich, S. A. (2022). Informative-Target Analysis. Middle European Scientific Bulletin, 22, 69-71.
20. Isroilova, G., & Abdurahimov, S. (2021, December). The socio-political activity of the youth of Uzbekistan. In International conference on multidisciplinary research and innovative technologies (Vol. 2, pp. 231-235).
21. Абдурахимов, Ш. А., Файзрахманова, А. А., & Шанина, Ю. А. (2020). ПУТИ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ УЧИТЕЛЯ-СЛОВЕСНИКА. In Система непрерывного филологического образования: школа–колледж–вуз. Современные подходы к преподаванию дисциплин филологического цикла в условиях полилингвального образования (pp. 2-8).
22. Абдурахимов, Ш. А. (2022, December). АНАЛИЗ ВИДОВ ЛЕКЦИЙ И ТЕХНОЛОГИЙ ОРГАНИЗАЦИИ НА ЭТАПАХ ОБУЧЕНИЯ. In E Conference Zone (pp. 34-41).
23. Sh, A. (2022). ISSUES OF FORMATION OF THE CENTER FOR MASTERING FOREIGN EDUCATIONAL PROGRAMS THAT FORM CIVIL EDUCATION IN STUDENTS IN THE SYSTEM OF PRIMARY EDUCATION IN UZBEKISTAN. International Journal of Early Childhood Special Education, 14(7).
24. Sh, A. (2022). SOCIAL ORIENTATION AND INTEGRITY OF EDUCATION. INTERNATIONAL JOURNAL OF SOCIAL SCIENCE &

INTERDISCIPLINARY RESEARCH ISSN: 2277-3630 Impact factor: 7.429, 11(09), 234-237.
25. Shokosim, A. (2022). THE ROLE OF THE FAMILY IN RAISING A HEALTHY GENERATION. Galaxy International Interdisciplinary Research Journal, 10(12), 1113-1116.
26. Shokosim, A. (2022). PSYCHOLOGY OF FAMILY AND FAMILY RELATIONS. Galaxy International Interdisciplinary Research Journal, 10(12), 1284-1287.