MINIMAKS TIPIDAGI SILLIQMAS OPTIMALLASH MASALASINI YECHISH USULI HAQIDA

Ravshanov Islom Akmal o‘g‘li
Muxammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot
texnologiyalar universiteti Samarqand filiali

Annotatsiya
Ushbu ishda kvadaratik funksiyalar sinfida aniqlangan diskret minimaksli masala qaralgan. Maksimum funksiyasining xossalari asosida optimallikning zaruriy va yetarli shartlari o‘rganilgan. Olingan natijalar bo‘yich qaralgan masala yechimimi qurish algoritmi haqida mulohazalar keltirilgan.

Kalit so‘zlar: kvadratik funksiya, silliqmas funksiya, maksimum funksiyasi, minimaks masalasi, optimallik shartlari, yechish algoritmi.

1. Kirish

Ekstremal masalalar nazariyasi hozirgi zamon matematikasining muhim bo‘limi hizoblanadi. Matematikaning bu sohasi optimallash masalalari paydo bo‘ladigani xilma-xil amaliy masalalariga keng tatbiqlari bilan ajralib turadi [1–4]. Bugungi kunda ekstremal masalalar nazariyasi va unig tatbiqlari tarkibiga kiruvchi matematik dasturlash, qaror qabul qilish nazariyasi, jarajonlar tadqiqoti, optimal boshqaruv nazariyasi, o‘yinlar nazariyasi kabi yo‘nalishlar iqtisodiyot, texnika, ishlab chiqarish, transport va boshqa sohalardagi dolzarb masalalarni hal etishda muvaffaqiyatli qo‘llanilmoqda[2–4].
Ekstremal masalalar nazariyasida zamonaviy yo‘nalishlardan biri silliqmas maqsad funksionalli optimallash masalalari hisoblanadi [5,6]. Bugungi kunda axborot to‘liqsizligi, tahlikali vaziyatlar, ma’lumotlarning turli darajadagi noaniqlgini e’tiborga olgan holda matematik modellarni qurish va ularni tadqiq etish dolzarb vazifalardan biri bo‘lib turibdi. Ayniqsa, manfaatlar qarama qarshiligi mavjud vaziyatlarda, ma’lumotlar noaniqligi sharoitida ehtimoliy-statistik tahlil usullarida foydalanish imkoniyati cheklangan hollarda minimaks(maksimin) tamoyili asosida qaror qabul qilishga harakat qilinadi [6]. Natijada maksimum yoki minimum tipidagi silliqmas funksionallar paydo bo‘ladi. Silliqmas funksionalli masalalarni optimallash bugungi kunda optimal boshqaruv nazariyasi uchun juda muhim bo‘lib, bunday masalalar nazariyasinin rivojlanishi matematikaning silliqmas tahlil va ko‘p qiymatli tahlil kabi bo‘limlarnin rivojlanishiga samarali ta’sir ko‘rsatmoqda [5–8]. Silliqmas optimallash masalalar muhim ahamiyat kasb etuvchi sohalardan yana biri dinamik tizimlarda trayektoriyalar ansamblini boshqarish bilan bog‘liq masalalar matematik modellari hisoblanadi[9–11].

Matematik dasturlashda ham maksimum yoki minimum tipidagi maqsad funksyalarini optimallash alohida ahamiyatga ega. Bunday minimaks va maksimin tipdagi masalalarni silliqmas tahlil negizida tadqiq etish va yechish usullarini rivojlantirish muhim masalalardan hisoblanadi [5,7,8].

2.Masalaning qo'yilishi. Tadqiqot usullari

Maksimum va minimum tipidagi funkiyalarning xossalarini o'rganishda bazaviy funksiyalar va optimallash amalining xususiyati hal etuvchi omillardan hisoblanadi. Shuni e'tiborga olib, ushbu ishda diskret miniaks masalasini kvadratik funksiyalar sinfi uchun qaraymiz.

Ishda chekli o'lchamli fazolar uchun chiziqli algebra usullaridan foydalanamiz. Tadqiqot bayonida $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$ vektorlardan foydalanamiz, bu yerda R^n– n-o'lchamli yevklid fazosi, $(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ – $x\in R^n$ va $y\in R^n$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi, $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ – $x\in R^n$ vektorning normasi.

Quyidagi kvadratik funksiyalarni qaraymiz^

$$f_i(x)=\frac{1}{2}(A_ix,x)+(b_i,x)+d_i, i=1,2,...,m, \quad (1)$$

bu yerda A_i – simmetrik $n\times n$-matritsa, $b_i\in R^n, d_i\in R^1$, $i=\overline{1,m}$. Shu kvadratik funksiyalar asosuda quyidagi maksimum funsiyasini tuzamiz:

$$\varphi(x)=\max_{i=\overline{1,m}} f_i(x)=\max_{i=\overline{1,m}}[\frac{1}{2}(A_ix,x)+(b_i,x)+d_i]. \quad (2)$$

Hosil qilingan (2) maksimum funksiyasini berilgan $\Omega\subseteq R^n$ yopiq to'plamda minimallash masalasini, ya'ni

$$\varphi(x_*)=\varphi_*=\inf_{x\in\Omega}\max_{i=\overline{1,m}} f_i(x)=\inf_{x\in\Omega}\max_{i=\overline{1,m}}[\frac{1}{2}(A_ix,x)+(b_i,x)+d_i]$$

shartni qanoatlantiruvchi $x_*\in\Omega$ nuqtani toppish masalasini qaraymiz. Qo'yilgan masalani quyidagicha belgilaymiz:

$$\max_{i=\overline{1,m}}[(\frac{1}{2}A_ix,x)+(b_i,x)+d_i]\to \min, x\in\Omega. \quad (3)$$

Ushbu (3) masala matematik dasturlashning diskret minimaks masalar sinfiga tegishlidir [8,9]. (3) masalani yechish usulini ishlab chiqish uchun (2) ko'rinishdagi maksimum funksiyasining ekstemal xossalari katta ahamiyatga ega. Matematik dasturlashda sonli usullarni ishlab chiqish ishun maqsad fumksiyasining eng tes tushish yo'nalishini qurishni bilish lozim bo'ladi. Bunga erishish uchun avvalo optimallikning zaruriy va yetarli shartlarini o'rganish muhim qadam hisoblanadi.

3. Tadqiqot natijalari

Maksimum funksiyasining ba'zi xossalarini keltiramiz [7,12].

1-xossa. (2) maksimum funksiyasi R^n da uzluksiz. Agar barcha A_i matrisalar musbat ishorali, ya'ni $(A_i x, x) \le 0 \quad \forall x \in R^n$ bo'lsa, u holda maksimum finksiyasi qavariq, agarda $A_i, i = \overline{1,m}$ matrisalar musbat aniqlangan, ya'ni $(A_i x, x) < 0 \quad \forall x \ne 0$ bo'lsa, u holda maksimum funksiyasi qat'iy qavariq bo'ladi.

2-xossa. (2) maksimum funksiyasi har bir $x^0 \in R^n$ nuqtada ixtiyoriy $g \in R^n$ yo'nalish bo'yicha hosilaga ega va bu hosila uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$\frac{\partial \varphi(x^0)}{\partial g} = \min_{i \in J^*(x^0)} (A_i x^0 + b_i, g), \qquad (4)$$

bu yerda $J^*(x^0) = \{i \in I_m : f_i(x^0) = \varphi(x^0)\}, I_m = \{1,2,...,m\}$.

Qo'yilgan masala uchun [7,8,12] ishlar natijalaridan foydalanib va bunda (4) formulani e'tiborga olib, optimallikning quydagi zaruriy va yetarli shartlariga ega bo'lamiz.

1-teorema. Aytaylik $x^0 \in \operatorname{int} \Omega$ – (3) masalaning yechimi bo'lsin. U vaqtda quyidagi tengsizlik

$$\inf_{\|g\|=1} \max_{i \in J^*(x^0)} (A_i x^0 + b_i, g) \ge 0 \qquad (5)$$

bajariladi. Agar barcha $A_i, i = \overline{1,m}$ matrisalar musbat ishorali bo'lib, (5) tengsizlik biror $x^0 \in \Omega$ uchun bajarilsa, u vaqtda x^0 – (3) masalaning yechimi bo'ladi.

Quyidagi $H^*(x^0) = \{z : z = -A_i x^0 - b_i, i \in J^*(x^0)\}$ to'plamni va uning qavariq qobig'i $L^*(x^0) = coH^*(x^0)$ to'plamni qaraymiz.

2-teorema. Optimallikning zaruriy va yetarli sharti bo'lgan (5) tengsizlik $0 \in L^*(x^0)$ munosabatga teng kuchlidir.

Agar (5) shart $x^0 \in \operatorname{int} \Omega$ nuqtada bajarilmasa, shu nuqtada (2) maksimum funksiyasining eng tez tushish yo'nalishini qurish mimkin. Minimaksli masalalar nazariyasi natijalari asosida ko'rsatish mumknki, eng tez tushish yo'nalishi

$$\max_{z \in L^*(x^0)} (z, g) \to \min, \|g\| = 1$$

masalaning yagona yechimi sifatida aniqlanadi va u bu yo'nalish $g^* = -\frac{z^*}{\|z^*\|}$ formula bo'yicha topiladi, bu yerda z^* nuqta $L^*(x^0)$ qavariq ko'pyoqlining koordinatalar boshiga, ya'ni $x = 0$ nuqtaga eng yaqin nuqtasidan iborat.

Misol. $f_i(x) = \|x\|^2 + (b_i, x) + \|b_i\|^2, i = 1,2$, $x = (x_1, x_2)$, $b_1 = (1,0), b_2 = (0,1)$. funksiyalar uchun minimaksli masalani qaraymiz:

$$\max_{i=1,2} [\|x\|^2 + (b_i, x) + \|b_i\|^2] \to \min, \|x\| \le 2. \qquad (6)$$

Maksimum funksiyasi $\varphi(x)=\|x\|^2+1+\max\{x_1,x_2\}$. $x^0=(1,1)$ nuqtani qaraymiz. $J^*(x^0)=\{1,2\}$, $H^*(x^0)=\{z^1,z^2\}$, $z^1=(3,2)$, $z^2=(2,3)$; $L^*(x^0)=\{v: v_1+v_2=5, 2\le v_1\le 3\}$. $0\in L^*(x^0)$ shart bajarilmaydi. Demak, $x^0=(1,1)$ nuqta minimaks masalasi yechimi emas. Shu nuqtada maksimum funksiyasi uchun eng tez tushish yo‘nalishi $g^*=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ bo‘lad, chunki $L^*(x^0)=\{v: v_1+v_2=5, 2\le v_1\le 3\}$ to‘plamning $x=0$ nuqtaga eng yaqin nuqtasi $z^*=(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ bo‘ladi.

4. Xulosa. Ushbu ishda (1) ko‘rinishdagi kvadratik funksiyalar sinfi uchun maksimum funksiyasi xossalar o‘rganildi. Shu funksiyaning qvariqlik shartlari va yo‘nalish bo‘yicha hosilasi uchun formula ko‘rsatildi. Shu natijalar asosida minimaksli masalada optimallikning zaruriy va yetarli shartlari olindi. Optimallikning zaruriy sharti bajarilmagan nuqtada eng tez tushish yo‘nalishini qanday qurilishi haqida nazariy mulohazalar keltirildi.
Olingan natijalar asosida qaralgan tipdagi minimaksli masalani yechimini qurish uchun hisoblash algoritmini ishlab chiqish mumkin.

Adabiyotlar

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. –М.: Наука, 1979. -482с.
2. Афанасьев В.Н., Колмановский В.В., Носов В.В. Математическая теория конструирования систем управления. –М.: Высшая школа, 2003.
3. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. –М.: Мир, 1982.
4. Малышев В.В. Методы оптимизации в задачах системного анализа и управления. М.: МАИ-ПРИНТ, 2010.
5. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука,1988.
6. Кейн В.М. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. М.: Наука,
7. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. –М.: Наука, 1972.
8. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. –М.: Наука, 1981.
9. Отакулов С. Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений. Монография. Lambert Academic Publishing, 2019.
10. Otakulov S., Rahimov B. Sh., Haydarov T.T. The nonsmoth optimal control problem for ensamble of trajectories of dynamic system under conditions of indeterminacy. Middle European Scientific Bulletin, vol. 5, 2020. -p. 38-42.

11. Otakulov S., Rahimov B. Sh. About the property of controllability an ensamble of trajectories of differential inclusion. International Enjineering Journal for Research & Development. Vol.5, issue 4, 2020. -p.366-374.
12. Отакулов С., Равшанов И.А. Свойства одного класса функций типа максимума и минимума и их применение к негладким задачам оптимизации. International scientific journal "Science and Innovation", 2022, № 2. -p. 60-68.